ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ CAUCHY

1) Να υπολογίσετε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

α) $\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz$, β) $\int_\gamma \frac{\cosh(z)}{z-2} dz$

γ) $\int_\gamma \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{4})^3} dz$, δ) $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2} dz$

$\gamma = \{z / |z| = 1\}$. Θετική φορά

ΛΥΣΗ

Σε καθεμία περίπτωση παρατηρούμε ότι η ως προς την ολοκλήρωση συνάρτηση δεν είναι παντού ολόμορφη στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης γ πάνω στην οποία και ολοκληρώναμε.

ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ:

i. Μέσω του ορισμού επικαμπυλίου ολοκληρώματος

ii. Μέσω του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy

iii. Μέσω της παράγουσας συνάρτησης. Να σημειωθεί ότι η χρήση της παράγουσας σε μη απλά συνεκτικό τόπο θέλει μεγάλη προσοχή διότι αν η συνάρτηση που έχουμε σκοπό να ολοκληρώσουμε είναι ολόμορφη σε πολλαπλά συνεκτικό τόπο, τότε μπορεί να μην έχει μοναδική παράγουσα!

Θα επιδιώξουμε να λύσουμε την άσκηση με τον τρόπο ii

α) Θεωρούμε $f(z) = e^z$ και $z_0 = 0$

Η συνάρτηση f ολόμορφη πάνω και εντός του μοναδιαίου κύκλου με $z_0 \in B(z_0, 1)$

Άρα, από τον τύπο του Cauchy, έχουμε:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z}{z-0} dz \Rightarrow \int_\gamma \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i$$

β) Η συνάρτηση $g(z) = \frac{\cosh(z)}{z-2}$ είναι ολόμορφη στον τόπο $\mathbb{C} \setminus \{2\}$.

Άρα, η g ολόμορφη πάνω και εντός του

μοναδιαίου κύκλου με $z_0 \notin \overline{B(0,1)}$

Τότε, $\int_\gamma \frac{\cosh(z)}{z-2}\, dz = 0$

γ) Θεωρούμε $f(z) = \sin z$ και $z_0 = \frac{\pi}{4}$.

Η συνάρτηση f ολόμορφη πάνω και εντός του μοναδιαίου κύκλου με $z_0 \in B(0,1)$

Άρα, από τον τύπο του Cauchy για παραγώγους έχουμε:

$$f^{(v)}(z_0) = \frac{v!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{v+1}}\, dz$$

Προφανώς για $v=2 \longrightarrow f''(z_0) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Άρα,

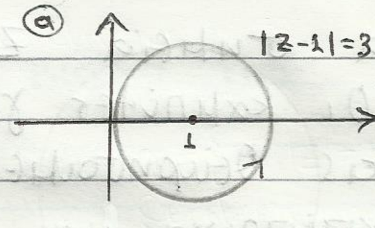
$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}\, dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}\, dz = \pi i \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$$

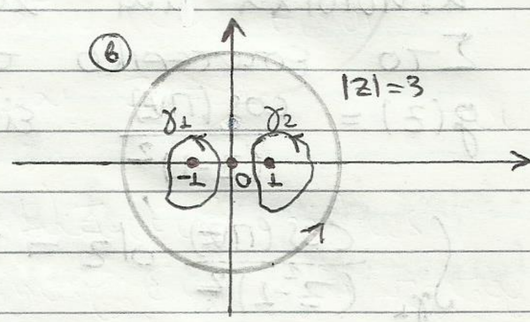
δ) Θεωρούμε $f(z) = e^{iz}$ με $z_0 = 0 \in B(0,1)$ και η f ολόμορφη εντός και πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Άρα, από το Θεώρημα Cauchy για παραγώγους έχουμε: (για $v=1$) $f'(0) = ie^{i\cdot 0} = i$

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\, dz \Rightarrow \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\, dz = 2\pi i \cdot i = -2\pi$$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:



$$\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2}\, dz \quad , \text{όπου}$$



α) γ είναι ο κύκλος $|z-1|=1$
β) γ είναι ο κύκλος $|z|=3$
με θετικές φορές ο καθένας.

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$\frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2} = \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^2(z+1)^2} \quad \text{ορίζεται στο } \mathbb{C}\setminus\{\pm 1\}.$$

α) Ορίζουμε ως $f(z) = \dfrac{\cos(\pi z)}{(z+1)^2}$ ολόμορφη πάνω και εντός του κύκλου $K(1,1)$. Τότε, από το Θεώρημα του Cauchy για παραγώγους ($\nu=1$) έχουμε:

$$f'(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^2(z+1)^2}\,dz = 2\pi i f'(1) \quad (1)$$

όπου:

$$f'(z) = \frac{-\pi \sin(\pi z)(z+1)^2 - 2(z+1)\cos(\pi z)}{(z+1)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{-\pi\cdot\sin(\pi)\cdot 2^2 - 2\cdot 2\cos(\pi)}{2^4} = \frac{1}{4}.$$

Άρα, η σχέση (1) γίνεται:

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^2(z+1)^2}\,dz = \frac{\pi i}{2}.$$

β) $$\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2}\,dz$$

με γ_1, γ_2 οποιεσδήποτε απλές κλειστές καμπύλες μέσα στην γ καμπύλη και η καθεμία να περιέχει τα σημεία $z_0 = -1$ και $z_0' = +1$ αντιστοίχως (Οι καμπύλες γ_1 και γ_2 ενδεχομένως μπορούμε να τις θεωρήσουμε κύκλους με κέντρα το -1 και $+1$ αντίστοιχα και ακτίνες οσοδήποτε μικρές θέλουμε)

Στο εσωτερικό της γ_1 η συνάρτηση $g(z) = \dfrac{\cos(\pi z)}{(z-1)^2}$ είναι ολόμορφη και άρα (Cauchy)

$$\int_{\gamma_1} \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2}\, dz = 2\pi i \cdot g'(-1) = -\frac{\pi i}{2}$$

Στο εσωτερικό της γ_2 η συνάρτηση $h(z) = \dfrac{\cos(\pi z)}{(z+1)^2}$ είναι ολόμορφη και άρα (Cauchy)

$$\int_{\gamma_2} \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2}\, dz = 2\pi i \cdot h'(1) = \frac{\pi i}{2}$$

Άρα, $$\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{(z^2-1)^2}\, dz = -\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi i}{2} = 0$$